



TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Ingeniería de Telecomunicación (4º, 2º c)

Unidad 2ª: Introducción a la decisión analítica

Aníbal R. Figueiras Vidal
Jesús Cid Sueiro
Ángel Navia Vázquez

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

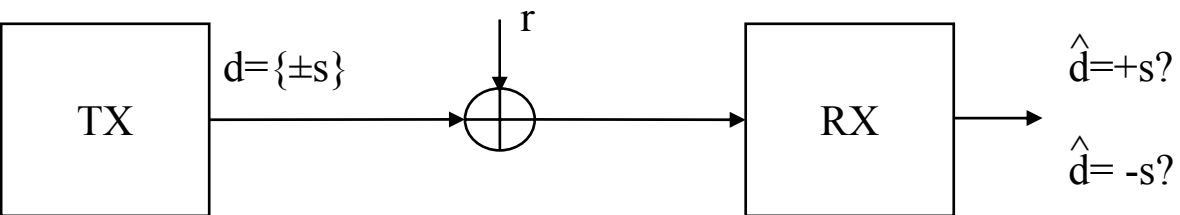
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

tema de comunicaciones

Transmisión digital binaria (antipodal; canal ideal)

canal discreto:



canal de ruido $G(0, v)$ (y blanco)

que describe la “física” del problema)

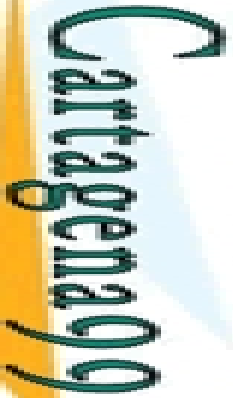
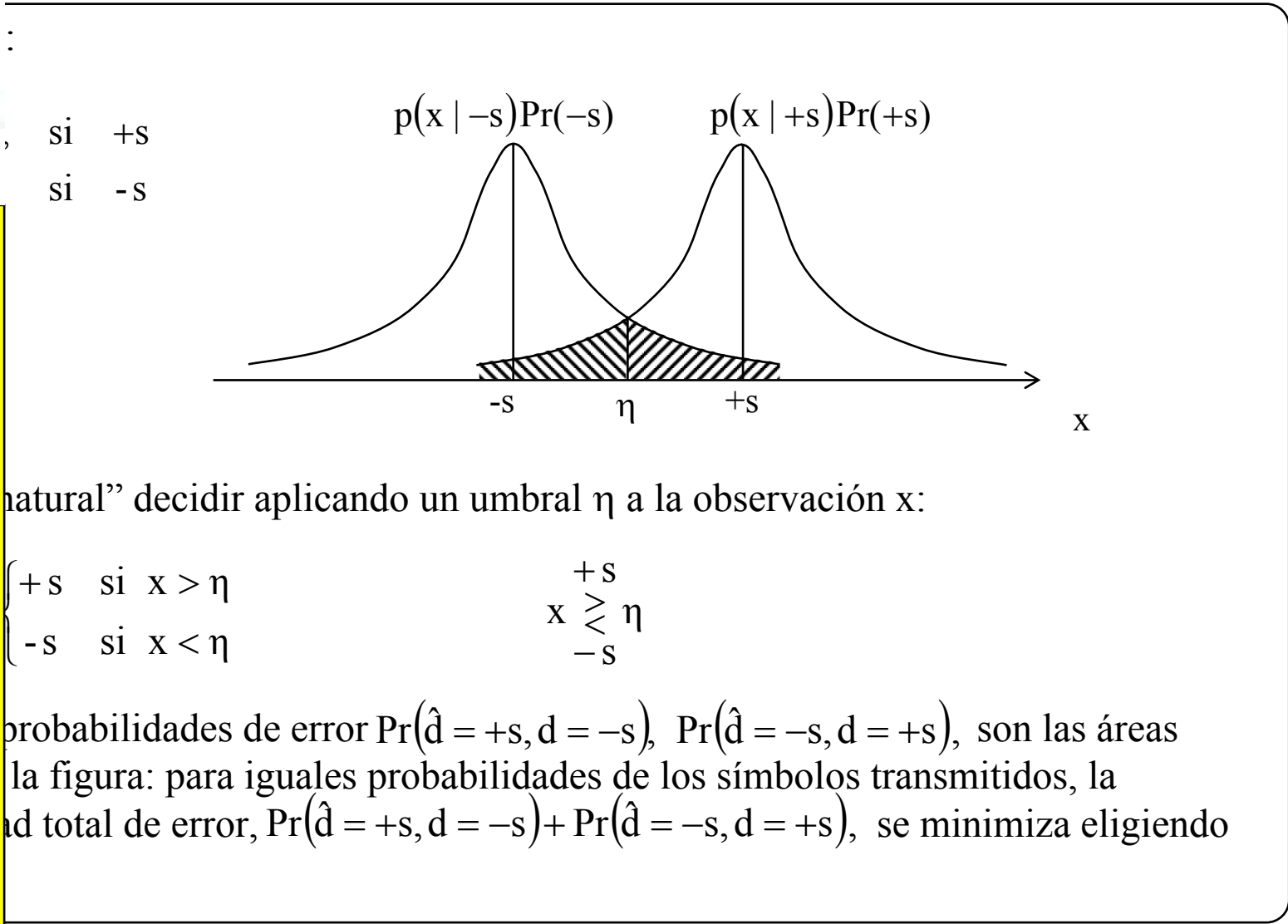
ESC-DTC/UCIIM

Cartagena99

UNIVERSIDAD

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

s prácticos

por cada celda de observación se tiene:

$s + r$, si hay blanco

r , si no

umbral se determina para fijar $\Pr(s|0)$ en un cierto valor (P_{FA} , **probabilidad de alarma**).

realidad, se **integran** observaciones provenientes de repetidas iluminaciones (blanco).

En cualquier caso, ante canal ideal (como ocurre en radar, p. ej.), el modelo digital se observa durante un intervalo de duración T

$= +s(t) + r(t)$, si $+s$

$= -s(t) + r(t)$, si $-s$ (análogamente si 0)

gaussiano y blanco: dada la incoherencia de $r(t)$, un proceso de integración es razonable para pasar al modelo discreto.

SC-DTC/UCIIM

de Ampliación

ción” se puede realizar con un filtro lineal e invariante, muestreando su concluir el intervalo de símbolo (T).

endrán

$$s = \int_0^T s(T - t') h(t') dt'$$

$$r = \int_0^T r(T - t') h(t') dt'$$

drá el carácter Gauss.

alta obvio, en la discusión anterior, que la probabilidad de error decrece con ón señal/ruido). Al ser el ruido blanco, su varianza depende de

t' , pero no de la forma de $h(t)$.

se dicha forma para maximizar la relación señal/ruido.

de la salida debida a la señal es $s^2 = \left[\int_0^T h(t') s(T - t') dt' \right]^2$

o la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left(\int uv \right)^2 \leq \left(\int u^2 \right) \left(\int v^2 \right); \quad = \text{si y sólo si } u = kv$$

SC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

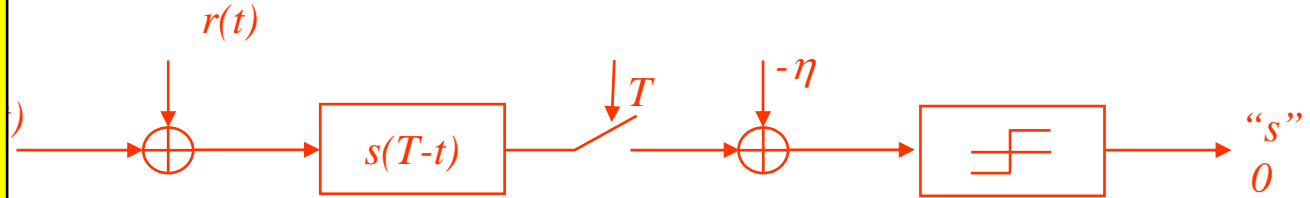
--

$$s^2 \leq \int_0^T h^2(t') dt' \int_0^T s^2(T-t') dt'$$

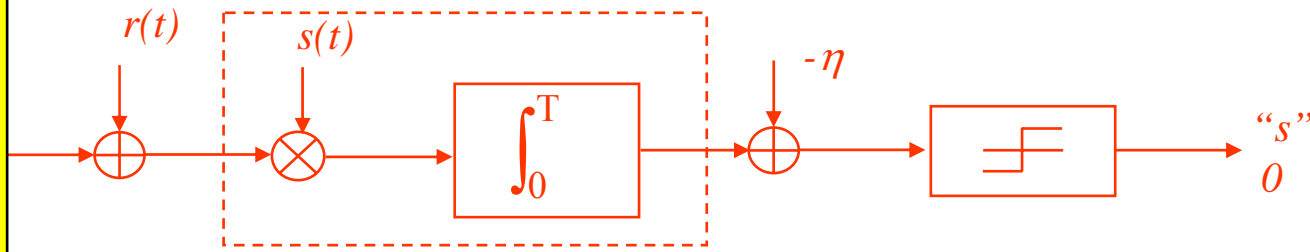
se el máximo con

$$h(t) = s(T-t) \quad (\text{la constante es irrelevante})$$

on un filtro lineal e invariante que tenga como respuesta al impulso el vertido (en el tiempo): es el **filtro adaptado**, óptimo (lineal e invariante) ción (en ruido Gauss y blanco).



alizable como **receptor de correlación**



SC-DTC/UCIIM



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



¿qué pasaría si el canal no fuese ideal?

*¿cómo se reduciría el fenómeno de la **Interferencia Inter-Símbolos** (“ISI”), y su consecuencia en las observaciones haría perder el carácter óptimo al proceso de comunicación?*

¿qué dos procedimientos fundamentales se combaten la ISI?

¿cómo se puede reducir su efecto, el conjunto perfil del símbolo transmitido-filtro de paso banda del receptor se diseña de forma que el resultado dé un valor nulo al ser muestreado en tiempos (0, -T, ±2T, ...); como el coseno alzado.

*¿cómo se puede combatir el ISI en un diseño anterior no suele incluirse el canal por ser desconocido: su efecto se puede combatir con un **igualador**, sistema (lineal e invariante) que, en cascada con el canal, pretende una respuesta ideal.*

¿cómo se puede combatir el ISI en un sistema que no es un proceso óptimo desde el punto de vista de decisión: no se puede combatir el efecto del ruido (es útil si la ISI domina).

SC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

procedería al análisis en el caso de transmitir múltiples símbolos?

Para las dos componentes (en fase y en cuadratura) conjuntamente o por separado, bastaría proyectar los símbolos sobre los componentes de una base de ondas de onda (correspondientes a posibles filtrados) para reducir el problema a un modelo discreto.

Resalte la ventaja del empleo de símbolos antipodales: maximizan la relación S/N; o de la ortogonalidad en el plano complejo.

SC-DTC/UCIIM




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

é aspectos se tienen en cuenta para diseñar un receptor de comunicaciones.

información “física” disponible sobre el problema: características de señal; adicionalmente se busca sencillez (igualadores lineales) para posibilitar adaptabilidad ante variaciones del canal.

¿cómo se minimiza la tasa de error en las comunicaciones digitales?

Objetivo es preservar la calidad de la información recibida: dada la forma de transmisión (digitalización de forma de onda o digitalización no binaria para modelos, protección posiblemente selectiva y aleatorización de los transmitidos), minimizar la tasa de error es una forma aproximada de lograrlo.

SC-DTC/UCIIM




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ura

os del tipo discutido se dicen de **tratamiento (digital) de señales** (“Digital processing”, DSP) porque interviene el tiempo; especialmente, cuando la a de establecerse en tiempo real.

e que las imágenes se manejan vía exploración secuencial.

SC-DTC/UCIIM




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

problemas que se plantean en términos que permiten la decisión/clasificación
 on:

de una estrategia en un juego

de la presencia de un componente químico en una muestra

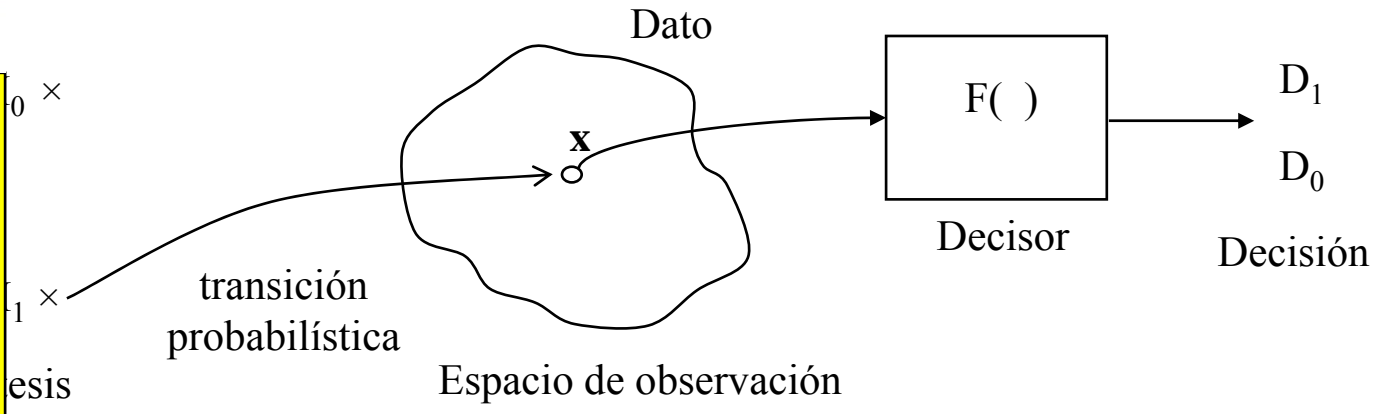
de aspectos generales de dichos problemas.

SC-DTC/UCIIM




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 --
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

alítica) de la decisión



se que con el conocimiento estadístico:

- probabilidades "a priori": $Pr(H_j)$
- probabilidades: $p(\mathbf{x}|H_j)$
- costos de coste: C_{ji} (se toman no negativos, y $C_{ji} > C_{ii}, \forall j \neq i$)

el decisor F

SC-DTC/UCIIM



ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

laboratorio de relaciones

$$p(\mathbf{x}, H_i) = p(\mathbf{x}, H_i) \quad : \text{ ddp conjunta de } \mathbf{x} \text{ y } H_i$$

$$\sum_i p(\mathbf{x} | H_i) \Pr(H_i) = p(\mathbf{x}) \quad : \text{ ddp de } \mathbf{x} \quad (\text{probabilidad total})$$

$$= \frac{p(\mathbf{x} | H_i) \Pr(H_i)}{p(\mathbf{x})} \quad : \text{ probabilidad "a posteriori" de } H_i \text{ (vista la observación)}$$

$$= \frac{p(\mathbf{x} | H_i) \Pr(H_i)}{\sum_j p(\mathbf{x} | H_j) \Pr(H_j)} \quad : \text{ forma de Bayes}$$

$$\int p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \Pr(H_i)$$

SC-DTC/UCIIM




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 --
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Información estadística disponible, se puede establecer que, en cualquier caso, si se da una cierta hipótesis H_i que origina una observación \mathbf{x} : decidir D_j llevará un coste

$$C(D_j, H_i) = C_{ji}$$

Se puede promediar respecto de cada elemento aleatorio (\mathbf{x} o H_i) o respecto a

que, si se pretende un diseño para ser aplicado en un número elevado de repeticiones, se puede fijar como objetivo algún promedio de este coste.

SC-DTC/UCIIM




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

de Ampliación

alíticamente el coste medio de decidir D_j a la vista de \mathbf{x} . Indique con qué minimiza.

$$\bar{C}(D_j | \mathbf{x}) = E\{C(D_j, H) | \mathbf{x}\} = \sum_i C_{ji} Pr(H_i | \mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \rightarrow D_{j^*} \quad \text{si} \quad j^* = \arg \left[\min_j \left\{ \sum_i C_{ji} Pr(H_i | \mathbf{x}) \right\} \right]$$

alíticamente el coste medio global. Indique con qué decisor se minimiza.

$$\bar{C} = E\{C(D(\mathbf{x}), H)\} = \sum_j \sum_i C_{ji} Pr(D_j, H_i)$$

cada \mathbf{x} se atribuye (determinísticamente) a D_j si está en cierta región X_j ,

$$Pr(D_j, H_i) = Pr(H_i) \int_{X_j} p(\mathbf{x} | H_i) d\mathbf{x}$$

$$\bar{C} = \sum_j \int_{X_j} \sum_i C_{ji} Pr(H_i) p(\mathbf{x} | H_i) d\mathbf{x}$$

nización determina $\{X_j\}$; equivale a:

$$\mathbf{x} \rightarrow D_{j^*} \quad \text{si} \quad j^* = \arg \left[\min_j \left\{ \sum_i C_{ji} Pr(H_i) p(\mathbf{x} | H_i) \right\} \right]$$

SC-DTC/UCIIM



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

UNIVERSIDAD

os dos objetivos anteriores, $\min \bar{C}(D_j | \mathbf{x})$ ó $\min \bar{C}$, elegiría usted en una práctica?

Primero minimiza el coste medio ante una observación; el segundo, el coste global...

o las observaciones aparecen según ciertas estadísticas, han de estar ponderados.

efecto:

$$\sum_i C_{ji} Pr(H_i | \mathbf{x}) = \frac{1}{p(\mathbf{x})} \sum_i C_{ji} p(\mathbf{x}, H_i)$$

$$\sum_i C_{ji} p(\mathbf{x} | H_i) Pr(H_i) = \sum_i C_{ji} p(\mathbf{x}, H_i)$$

fieren en un factor que no depende de j : luego ambos objetivos dan igual solución.

to constituye la base de la **Teoría Bayesiana de la Decisión**.

SC-DTC/UCIIM

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ior, derive un test de umbral para el caso binario

$$D_0 : C_{00} Pr(H_0) p(\mathbf{x} | H_0) + C_{01} Pr(H_1) p(\mathbf{x} | H_1)$$

$$D_1 : C_{10} Pr(H_0) p(\mathbf{x} | H_0) + C_{11} Pr(H_1) p(\mathbf{x} | H_1)$$

$$p(\mathbf{x} | H_0) + C_{01} Pr(H_1) p(\mathbf{x} | H_1) \stackrel{D_1}{\geq} C_{10} Pr(H_0) p(\mathbf{x} | H_0) + C_{11} Pr(H_1) p(\mathbf{x} | H_1)$$

$$(C_{01} - C_{11})Pr(H_1)p(\mathbf{x} | H_1) \stackrel{D_1}{\geq} (C_{10} - C_{00})Pr(H_0)p(\mathbf{x} | H_0)$$

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} \stackrel{D_1}{\geq} \frac{(C_{10} - C_{00})Pr(H_0)}{(C_{01} - C_{11})Pr(H_1)} \triangleq \eta$$

ón de verosimilitudes (“Likelihood Ratio Test”, LRT)

ómo:

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x} | H_1) - \ln p(\mathbf{x} | H_0) \stackrel{D_1}{\geq} \ln \eta$$

SC-DTC/UCIIM



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



e, también hay un test de probabilidades a posteriori:

$$\frac{\Pr(H_1 | \mathbf{x})}{\Pr(H_0 | \mathbf{x})} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}} = \varphi$$

Las denominaciones de los siguientes tests para casos particulares:

Mapa a posteriori (MAP): $C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = C$

Verosimilitud (ML): $C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = C, \Pr(H_0) = \Pr(H_1) (=1/2)$

MAP: llevando al test de probabilidades a posteriori

$$\frac{\Pr(H_1 | \mathbf{x})}{\Pr(H_0 | \mathbf{x})} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} 1; \quad \Pr(H_1 | \mathbf{x}) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \Pr(H_0 | \mathbf{x})$$

LRT: llevando al LRT

$$\frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} 1; \quad p(\mathbf{x} | H_1) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} p(\mathbf{x} | H_0)$$

Este test ocurre para hipótesis múltiples: se decide según la máxima $\Pr(H_i | \mathbf{x})$ o la máxima $p(\mathbf{x} | H_i)$

SC-DTC/UCIIM

Cartagena99

UNIVERSIDAD

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Regla minimax

En esta situación sólo son conocidos los costes C_{ji} y no las $\Pr(H_i)$ ni las probabilidades de que se puede producir una hipótesis. En estas condiciones, lo “razonable” es decidir aquella hipótesis que minimice el coste que se puede producir

$$D_{j^*} : j^* = \arg \left[\min_j \left\{ \max_i C_{ji} \right\} \right]$$

Esto equivale a admitir “uniformidad” en la información estadística no disponible). La adopción de esta estrategia es frecuente en los juegos: en los que la situación depende de la actuación de los otros jugadores.

También puede extenderse este modo de proceder a casos en que se desconoce la información: como las probabilidades a priori, p.ej.

SC-DTC/UCIIM




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Características de los decisores

Probabilidad de **error tipo I** o de **falsa alarma**

$$P_I = P_{FA} = \int_{X_1} p(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} = \int_{\eta}^{\infty} p(\Lambda | H_0) d\Lambda$$

Probabilidad de **error tipo II** o de **pérdida**

$$P_{II} = P_M = \int_{X_0} p(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x} = \int_0^{\eta} p(\Lambda | H_1) d\Lambda$$

P_D : probabilidad **de detección**)

Existe un obvio compromiso en la reducción de P_{FA} y P_M .

Se pueden estimar como frecuencias relativas.

SC-DTC/UCIIM



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



de Neyman-Pearson

Algunas situaciones, como en Radar, se busca maximizar P_D manteniendo

$$P_{FA} = \alpha' \leq \alpha$$

Con estas conocidas las características estadísticas habituales, basta acudir a los valores de Lagrange y minimizar

$$\begin{aligned} \Lambda &= P_M + \lambda (P_{FA} - \alpha') = \int_{X_0} p(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x} + \lambda \left[\int_{X_1} p(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} - \alpha' \right] = \\ &= \lambda(1 - \alpha') + \int_{X_0} [p(\mathbf{x} | H_1) - \lambda p(\mathbf{x} | H_0)] d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se minimiza si X_0 es la región en que el integrando es negativo; de lo contrario resulta

$$\Lambda(\mathbf{x}) \begin{matrix} D_1 \\ \geq \\ D_0 \end{matrix} \lambda$$

El valor de λ se obtiene de

$$P_{FA} = \int_{\lambda}^{\infty} p(\Lambda | H_0) d\Lambda = \alpha' \leq \alpha$$

SC-DTC/UCIIM

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

UNIVERSIDAD

ran ventaja de este planteamiento el que permita tratar casos en que no es de directa la Teoría Bayesiana: p.ej., si \mathbf{x} depende de un parámetro determinista (amplitud o una fase, p.ej.) bajo H_1 , no existe $p(\mathbf{x} | H_1)$, y no se puede acudir a un LRT: pero, como se verá, sí cabe aplicar el Criterio de N-P.

SC-DTC/UCIIM



Cartagena99



UNIVERSIDAD

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 - - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70